„Matematyka" Nr 3 Maj-Czerwiec 1984

EWA ŁAKOMA
Warszawa

# O PEWNYM ZADANIU Z RACHUNKU PRAWDOPODOBIEŃSTWA I JEGO ROZWIĄZANIACH

Rachunek prawdopodobieństwa w obecnie obowiązujących w naszych szkołach programach nauczania matematyki znajduje się w specyficznej sytuacji, występuje bowiem na dwóch różnych etapach procesu nauczania i za każdym razem wykładany jest według innej koncepcji dydaktycznej. Są to w tej chwili dwa zupełnie niezależne nurty nauczania. Starszy z nich — to obowiązujący już od kilkunastu lat kurs w ujęciu zbliżonym do aksjomatycznego (por. [10]), zlokalizowany w ostatniej klasie szkoły średniej. Nie jest to pierwsze spotkanie ucznia z aksjomatyczną konstrukcją teorii matematycznej. Nieco wcześniej zapoznaje się on z ujętą w ten sposób geometrią. Jednakże w przypadku geometrii sformułowanie aksjomatów jest ukoronowaniem wieloletniego nauczania. Zanim uczeń dotrze do listy aksjomatów, które i tak często sprawiają mu wiele kłopotów, ma już za sobą etapy nauczania propedeutycznego i dedukcji lokalnej, gdzie kształtowane są jego intuicje geometryczne i gdzie ma możność przyswajania podstawowych pojęć geometrii i rozwijania odpowiednich umiejętności. Ze wspomnianym nurtem nauczania rachunku prawdopodobieństwa sytuacja jest zupełnie inna. Teoria aksjomatyczna — to pierwszy i jedyny kontakt ucznia z tą dyscypliną. Nic więc dziwnego, że uczeń pozbawiony możliwości wcześniejszego przygotowania poprzez nauczanie propedeutyczne, mimo sporej już dojrzałości matematycznej, ma ogromne kłopoty ze zrozumieniem abstrakcyjnej teorii. Są one tym większe, że rachunek prawdopodobieństwa jest przecież dyscypliną kierującą się dość specyficznym sposobem rozumowania, odmiennym niż pozostałe działy matematyki. Jak wskazują badania współczesnej psychologii i dydaktyki, ten specyficzny sposób rozumowania powinien być przez uczniów poznawany i kształtowany stopniowo w ciągu kolejnych lat nauki. Dlatego też należy rozpoczynać nauczanie rachunku prawdopodobieństwa jak najwcześniej, gdy tylko jest to możliwe i dydaktycznie uzasadnione, i zaznajamiać uczniów z tematyką probabilistyczną w sposób odpowiadający zarówno poziomowi ich wiedzy matematycznej, jak i stopniowi ich rozwoju kognitywnego. Dopiero finałem takiego wieloletniego nauczania, w trakcie którego powinno być miejsce na powrót do tych samych zagadnień na coraz to wyższych poziomach, może stać się sformułowanie aksjomatów i przedstawienie rachunku prawdopodobieństwa jako teorii aksjomatycznej, o ile w ogóle okaże się to potrzebne z dydaktycznego punktu widzenia.



Nowy program nauczania matematyki w szkole podstawowej uwzględnia te postulaty, wprowadzając hasła o tematyce probabilistycznej w każdej klasie, począwszy od klasy czwartej. Stąd też drugie miejsce, w którym pojawia się rachunek prawdopodobieństwa w procesie nauczania — to czwarta i następne klasy szkoły podstawowej.

Realizowana w nich koncepcja nauczania rachunku prawdopodobieństwa, zaprezentowana w podręcznikach: [1], [2], [9] jest zgodna ze sformułowanymi wyżej uwagami. Zatem analogicznie, jak w przypadku geometrii, nauczanie rozpoczyna się od kształtowania właściwych intuicji probabilistycznych oraz wprowadzania podstawowych pojęć rachunku prawdopodobieństwa stopniowo, w sposób nieformalny, odpowiedni do stopnia rozwoju poznawczego ucznia. Ten stopień — to stadium operacji konkretnych oraz przejściowy okres pomiędzy tym poziomem a poziomem operacji formalnych. Narzuca to odpowiedni styl nauczania — nauczanie konkretno-czynnościowe. Naturalną aktywnością dzieci w tym wieku są gry i zabawy. Stąd też pierwszy kontakt z rachunkiem prawdopodobieństwa odbywa się przy okazji gier dydaktycznych o naturze probabilistycznej. W podręczniku [1] można znaleźć ich sporo. Pozwalają one na kształtowanie w trakcie zabawy pewnych intuicji, pewnego doświadczenia, na bazie którego w latach następnych będzie można budować podstawowe pojęcia rachunku prawdopodobieństwa. Gry służą do stworzenia takich sytuacji dydaktycznych, w których w naturalny sposób pojawiają się problemy probabilistyczne i pytania, na które uczniowie mogą znaleźć odpowiedź zgodnie z własną intuicją i własnym zdrowym rozsądkiem.

Na tym poziomie widać już także zasadniczy rys całej koncepcji: stwarzanie sytuacji, w których w naturalny sposób pojawiają się problemy do rozwiązania — problemy probabilistyczne, a następnie rozwiązywanie ich metodami dostępnymi uczniowi na danym poziomie nauczania.

Natura problemu probabilistycznego jest taka, że od razu jesteśmy postawieni w sytuacji typowej dla całego przyrodoznawstwa. Należy skonstruować pewien model teoretyczny, mniej lub bardziej doskonały, i używając tego modelu czynić interesujące nas przewidywania. Ważnym etapem tych działań jest skonfrontowanie wyników pochodzących z rozważań teoretycznych z wynikami uzyskanymi doświadczalnie. Dlatego też w klasie piątej (por. [2]) uczniowie zapoznają się z przykładami mającymi na celu ukazanie, czym jest model zjawiska losowego i że model nie jest tym samym, co modelowane zjawisko. Wprowadzone jest pojęcie częstości doświadczalnej otrzymywanej w trakcie analizowania doświadczenia losowego oraz pojęcie częstości teoretycznej uzyskiwanej na podstawie analizy modelu rozpatrywanego doświadczenia losowego i służącej do przewidywania częstości doświadczalnych. Użycie prostych lokalnych modeli teoretycznych do badania zjawisk losowych jest typowe i zasadnicze dla całej tej koncepcji (por. [12]). Natomiast wprowadzenie ogólniejszej metody modeli teorio-miarowych będzie końcowym, najbardziej zaawansowanym etapem nauczania.

Uczniowie podążający tym kursem, w miarę upływu lat coraz bardziej zaawansowanym, gdy napotkają na aksjomatykę rachunku prawdopodobieństwa, będą do tego już na tyle przygotowani, że takich kłopotów, jakie są obecnie w szkole średniej, mieć nie powinni. Ale zanim to nastąpi, problem uczniów nie przystosobionych do obecnego aksjomatycznego kursu rachunku prawdopodobieństwa będzie przez kilka najbliższych lat wciąż jeszcze aktualny.

Dlatego też głównym celem niniejszego artykułu jest pokazanie, że nie czekając na zmiany programowe można stopniowo oswajać uczniów szkoły średniej z probabilistyką, którą jako dział matematyki, będą zgodnie z planem systematycznie poznawać później. Wymaga to poświęcenia niewielu zajęć, w czasie których trzeba przejść wraz z uczniami drogę od konkretnego podejścia do zjawisk losowych i prostych metod wnioskowania opartych na zdrowym rozsądku, aż po pierwsze najprostsze problemy teoretyczne. Może to być powtórzenie drogi uczniów dzisiejszej szkoły podstawowej, ale oczywiście dostosowane zarówno od strony treści, jak i formy do rozwoju, wiedzy i zainteresowań odbiorców. Zajęcia takie, by spełniły swoje zadanie, muszą pod każdym względem być przygotowane bardzo starannie. Będzie to przecież w zasadzie pierwszy kontakt ucznia z tym działem matematyki. Kontakt, w którym chodzi nie tylko o zapoznanie go z podstawowymi pojęciami i ze sposobem rozumowania typowym dla rachunku prawdopodobieństwa, ale przede wszystkim o zaciekawienie go światem zjawisk stochastycznych, to znaczy zjawisk zależnych od przypadku.

Podstawowa trudność, z jaką nauczyciel musi sobie poradzić — to dobór problemów do rozwiązania. Od tego przede wszystkim zależy powodzenie całego przedsięwzięcia. Dobrych przykładów, tj. poprawnych merytorycznie, a jednocześnie interesujących i na tyle prostych, aby mogły być rozważane w szkole, w dostępnych publikacjach pojawia się bardzo niewiele. Jednym z nielicznych źródeł, gdzie pokazane jest stopniowanie trudności odpowiednio do wieku uczniów, może być wspomniana już seria podręczników: [1], [2], [9]. Problemy w nich zawarte można łatwo dostosować pod względem sformułowania oraz metody rozwiązywania do wiedzy i umiejętności uczniów o bardzo zróżnicowanym przygotowaniu matematycznym.

W dalszej części artykułu pokażemy, jak w sposób kształcący i atrakcyjny można rozwiązywać to samo zadanie na różnych poziomach zaawansowania matematycznego uczniów.

Wszystkie przykłady, przedstawione w podręczniku dla klasy piątej [2], dotyczą skończonych przestrzeni probabilistycznych. Tymczasem już na tym poziomie nauczania można zapoznać uczniów z prostymi przykładami takich zjawisk losowych, które opisuje się przeliczalnymi przestrzeniami zdarzeń elementarnych, oczywiście pod warunkiem, że uczyni się to w sposób propedeutyczny — na miarę możliwości kognitywnych uczniów. Wprowadzenie na tak wczesnym etapie nauczania problemów tego typu jest bardzo korzystne zarówno ze względu na właściwe rozwijanie u uczniów myślenia probabilistycznego, jak również z punktu widzenia późniejszego nauczania matematyki, a w tym rachunku prawdopodobieństwa na poziomie bardziej zaawansowanym (por. [5]). Rozważanie w dotychczasowym nauczaniu szkolnym tylko zagadnień o skończonych przestrzeniach probabilistycznych jest przecież ograniczeniem sztucznym, wynikającym głównie z tego, że dawniej nie było propedeutycznego ujęcia problemów o schematach nieskończonych i trzeba było posługiwać się zbyt zaawansowanym aparatem matematycznym. Obecnie metody analizowania pewnych zagadnień o przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych, odpowiednie dla elementarnego nauczania, istnieją (por. [4], [8]) i mogą być z powodzeniem wykorzystywane już we wczesnym etapie nauczania. Dlatego też w klasie szóstej, obok przykładów mających na celu pogłębienie oraz usystematyzowanie dotychczas nabytych przez uczniów wiadomości i umiejętności z zakresu probabilistyki, autorzy omawianej koncepcji dydaktycznej wprowadzają również najprostsze przykłady zagadnień o przeliczalnej liczbie zdarzeń elementarnych (por. [9]). Zadanie, które obecnie przedstawimy, zalicza się właśnie do klasy problemów o przeliczalnej przestrzeni zdarzeń elementarnych. Na artykuł ten można spojrzeć również jako na propozycję i zarazem przegląd możliwości rozszerzenia metod stosowanych w szkole. Każda z omawianych metod może być rozwinięta i jest interesująca matematycznie.

**Zadanie.** Jacek i Marek rzucali piłką do kosza. Obaj chłopcy trafiali do kosza z częstością $\frac{1}{2}$, zatem można powiedzieć, że prezentują wyrównany poziom w zakresie umiejętności trafiania piłką do kosza. W pewnym momencie postanowili zrobić zawody: będą rzucać do kosza na przemian — kto pierwszy trafi, ten wygrywa pojedynek. Jacek twierdzi, że skoro obaj mają jednakowe szanse trafienia do celu, to wszystko jedno, kto rozpoczyna grę. Czy rzeczywiście Jacek ma rację?

Z tym pytaniem możemy zwrócić się do uczniów i zaproponować im dokładniejsze przeanalizowanie gry oraz ocenę szans obu graczy na zwycięstwo.

**Rozwiązanie zerowe — eksperymentowanie.** Pierwszym naturalnym podejściem ucznia do rozwiązania tego zadania jest z pewnością próba zorientowania się, na czym gra opisana w zadaniu w ogóle polega. Może w tym pomóc przeprowadzenie kilkunastu, czy też kilkudziesięciu lub więcej takich pojedynków. Obserwując ich wyniki można zauważyć, że w większości przypadków wygrywał ten, kto rozpoczynał rzuty do kosza, co nasuwa podejrzenie, że szanse wygrania dla obu zawodników nie są równe.

Przeprowadzenie eksperymentu polegającego na wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia losowego, o którym mowa w zadaniu, może we wstępnym etapie zajmowania się tym problemem służyć jedynie dla nabrania lepszej orientacji, na czym to doświadczenie polega.

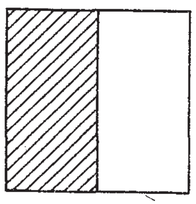
Pomijając oczywiste w przypadku rozważanego zadania trudności organizacyjne w przeprowadzeniu tego eksperymentu, wielokrotne powtarzanie doświadczenia losowego nie wnosi wiele do kwestii oceny szans na wystąpienie danego zdarzenia. Uzyskane częstości doświadczalne mogą się znacznie różnić między sobą przy kolejnych próbach, co uniemożliwia wyciągnięcie wniosków dotyczących przewidywania wyników w następnych seriach doświadczeń, nie mówiąc już o tym, że samo przeprowadzanie eksperymentu szybko się uczniom znudzi.

Sytuacja jest tu analogiczna, jak w przypadku wielokrotnego rzucania monetą w tym celu, by przekonać uczniów, że średnio połowa rzutów daje w wyniku orła i średnio połowa — reszkę (por.: [3], [7], [11]). Wiadomo przecież, że uzyskanie rzeczywiście przekonujących częstości doświadczalnych jest mało prawdopodobne, zatem ze strony nauczyciela staje się konieczna agitacja, że mimo, iż uzyskane częstości nie potwierdzają tego faktu, to jednak on zachodzi. Nie ma to dostatecznej siły przekonywania dla większości uczniów i jest dydaktycznie raczej szkodliwe. Na podstawie jednej szczególnej serii doświadczeń nie możemy przecież wnioskować o tym, jakich wyników można się spodziewać w serii następnej.

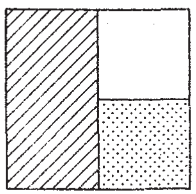
Przeprowadzenie wielokrotnego powtórzenia doświadczenia losowego jest tylko wtedy korzystne, gdy możemy jego wyniki skonfrontować z teoretycznymi przewidywaniami interesujących nas częstości. W tym celu, uwzględniając cechy charakterystyczne rozważanego doświadczenia losowego, możemy zbudować jego model teoretyczny i na podstawie tego modelu dokonać obliczeń pozwalających na przewidywanie częstości doświadczalnych. Przeprowadzenie eksperymentu po takich teoretycznych rozważaniach służyć będzie sprawdzeniu, czy zbudowany model jest odpowiedni, czy też nie. Dlatego też, gdy przekonamy się, że uczniowie orientują się, na czym polega problem, który ma być rozwiązany, należy szybko przejść do następnego etapu rozważań i podjąć próbę teoretycznej oceny częstości.

**Rozwiązanie pierwsze — „dzielenie skóry na niedźwiedziu".** Pomimo, że nie możemy przewidzieć, jak zakończy się opisany w zadaniu pojedynek, oszacujemy szanse jego wyników, przeprowadzając następujące rozumowanie (por. [13]). Rysujemy kwadrat, w którym będziemy zaznaczać szanse obu zawodników na trafienie do kosza w kolejnych rzutach. Pierwszy rzuca Jacek. Szansa, że trafi do kosza, jest taka sama, jak szansa, że nie trafi. Zatem kwadrat dzielimy na połowy, z których jedną „przydzielamy" Jackowi (rys. 1a). W przypadku gdy Jackowi się nie powiodło, do kosza rzuca Marek. Jego szansa na trafienie do kosza jest taka sama, jak szansa na to, że rzut

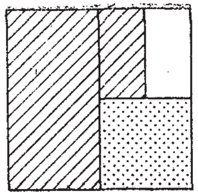
( ▨ wygrana Jacka, ▦ wygrana Marka )



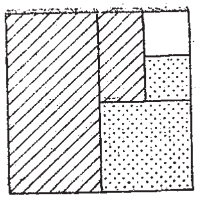
Rys. 1a



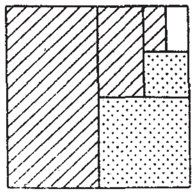
Rys. 1b



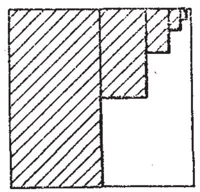
Rys. 1c



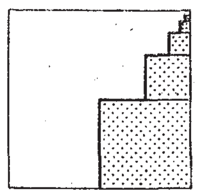
Rys. 1d



Rys. 1e



Rys. 2a



Rys. 2b

się nie uda. Dlatego drugą, nie zakreskowaną połowę kwadratu dzielimy na połowy i jedną z nich oznaczamy kolorem Marka (rys. 1b). W przypadku, gdy Marek nie trafił, próbę ponawia Jacek z szansą na celny rzut wynoszącą $\frac{1}{2}$, a zatem nie zakreskowaną część kwadratu dzielimy na połowy i jedną z nich „przydzielamy" Jackowi itd.... (rys.: 1c, 1d, 1e) Przyglądając się rysunkom uczniowie łatwo zauważą, że obszar odpowiadający szansom Jacka na zwycięstwo jest większy od obszaru obrazującego wielkość szans Marka. Zatem na tej podstawie wnioskujemy, że gracz rozpoczynający rzuty do kosza ma większe szanse na zwycięstwo w tej grze (rys. 2a i 2b).

Jeśli rozwiązujemy zadanie z uczniami szkoły podstawowej, na tym stwierdzeniu musimy poprzestać. Jeśli zaś zadania te

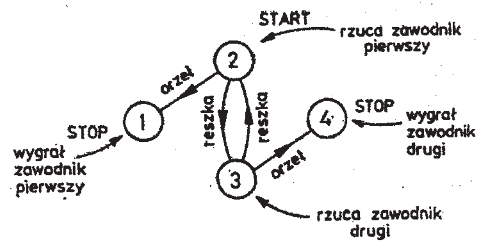


rozwiązują uczniowie szkoły średniej, którzy poznali już pojęcie szeregu geometrycznego, to mogą oni te szanse dokładnie obliczyć, sumując odpowiednie pola kwadratu.

Przyjmując, że pole kwadratu wynosi 1, szanse na zwycięstwo dla gracza pierwszego wynoszą: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots=\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{2}{3}$, a dla gracza drugiego: $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^6}+\ldots=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2^2}}=\frac{1}{3}$.

Zwróćmy przy tym uwagę na fakt interesującego wykorzystania pojęcia szeregu geometrycznego i jego sumy. Zwykle w trakcie nauczania matematyki brakuje ciekawych przykładów ukazujących zastosowanie tego pojęcia. Wykorzystanie szeregów geometrycznych w naszym zadaniu jest naturalne i dobrze umotywowane. Pokazujemy zarazem, że pojęcie to jest bardzo przydatnym narzędziem służącym do wykonywania pewnych obliczeń nieskończonych.

**Rozwiązanie drugie — symulacja doświadczalna.** Ważnym elementem w nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa jest stworzenie uczniom możliwości skonfrontowania ich przewidywań teoretycznych z doświadczeniem. Do tego celu dobrze nadaje się przeprowadzenie symulacji omawianego doświadczenia losowego (por. [8]). Zamiast wielokrotnie powtarzać rozgrywki, o których mowa w naszym zadaniu, można rzuty do kosza zastąpić na przykład rzutami monetą (zgodnie z umową: orzeł oznacza trafienie do kosza,




Rys. 3

reszka — rzut chybiony), a poszczególne etapy gry śledzić na grafie przedstawiającym jej przebieg (rys. 3).

W stanie START umieszczamy pionek do gry i przesuwamy go zgodnie z wynikiem rzutu monetą (z kolei rzuty monetą możemy zastępować wykorzystaniem tablic liczb losowych [9], czy też możliwością użycia kalkulatora kieszonkowego do generowania liczb losowych). Dotarcie pionka do jednego ze stanów końcowych oznacza koniec rozgrywki. Na takiej planszy można przeprowadzić symulację wielu rozgrywek jednocześnie, stawiając odpowiednio dużą liczbę pionków w stanie START i rozprowadzając je zgodnie z wynikami rzutów monetą aż do momentu, gdy wszystkie pionki znajdą się w stanach końcowych. Dla przykładu podajemy jeden z możliwych przebiegów symulacji 100 rozgrywek (tablica 1). Na podstawie tej symulacji uzyskamy czę-

TABLICA 1

| 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|
| Liczba pionków w danym stanie | 100 | | |
| 55 | | 45 | |
| 55 | 24 | | 21 |
| 65 | | 14 | 21 |
| 65 | 8 | | 27 |
| 68 | | 5 | 27 |
| 68 | | | 32 |

stości doświadczalne interesujących nas rezultatów: *częstość doświadczalna zwycięstwa gracza pierwszego równa jest ilorazowi liczby pionków, które dotarły do stanu* 1 *przez liczbę pionków w obu stanach końcowych; częstość doświadczalna zwycięstwa gracza drugiego równa jest ilorazowi liczby pionków, które dotarły do stanu* 4 *przez liczbę pionków w obu stanach końcowych.*

Otrzymane wyniki możemy teraz porównać z przewidywaniami, których dokonaliśmy metodą podaną w rozwiązaniu pierwszym. To porównanie zwykle doprowadza uczniów do wniosku, że chociaż rozkłady doświadczalne uzyskane w wyniku przeprowadzania symulacji doświadczalnych mogą się różnić, to jednak są one w pewnym sensie podobne.

Uczniowie szkoły podstawowej na tym poziomie nauczania mogą jedynie zbadać, czy doświadczenie potwierdza poczynione w sposób teoretyczny w rozwiązaniu pierwszym stwierdzenia, że gra nie jest sprawiedliwa i czy ten, kto zaczyna, ma istotnie większe szanse.

W przypadku uczniów szkoły średniej możemy dokonać dokładniejszych porównań, ponieważ dysponujemy modelem, który dostarczył dokładnych informacji o rozkładzie wyników.

Podkreślmy jeszcze, że stosowanie symulacji doświadczalnej jest ważnym etapem w elementarnym nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa. Ważne jest to, by uczniowie zrozumieli, że jedne doświadczenia losowe można zastępować innymi im równoważnymi.

Istotnym punktem jest przedstawienie przebiegu rozważanego doświadczenia za pomocą grafu z ustalonym „rozkładem jazdy".

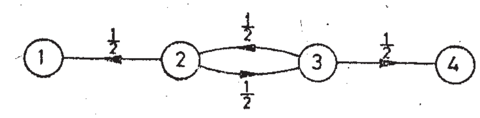
Metoda symulacji doświadczalnej polega głównie na tym, że właściwie rozważamy dwa doświadczenia losowe i przebieg jednego z nich przewidujemy na podstawie tego, co wydarzyło się w drugim. Te doświadczenia są ze sobą w pewien sposób związane — i jedno i drugie opisuje taki sam graf. Wybieramy oczywiście to, które jest prostsze do przeprowadzenia. W przypadku naszego zadania prościej jest rzucać monetą niż piłką do kosza i skoro uznaliśmy, że szanse obu zawodników na celny rzut są takie same, to i jedno i drugie doświadczenie opisuje ten sam graf. Możemy w pewnym sensie powiedzieć, że rzucanie monetą jest tu modelem teoretycznym dla rzucania piłką do kosza.

**Rozwiązanie trzecie — symulacja idealizowana.** W celu dokonania dokładnej oceny szans każdego z zawodników na zwycięstwo, możemy skonstruować kolejny model teoretyczny rozważanego zagadnienia, posługując się symulacją idealizowaną (por. [8]). Jest ona w pewnym sensie teoretycznym przebiegiem opisanej w rozwiązaniu drugim symulacji zwykłej.

Przyglądając się grafowi obrazującemu przebieg gry zauważamy, że z każdego stanu wewnętrznego (w naszym przypadku są to stany 2 i 3) prowadzą dwie drogi. Szanse przesunięcia pionka są dla każdej z tych dróg jednakowe, wynoszą $\frac{1}{2}$, zatem zamiast rozprowadzać pionki zgodnie z wynikami rzutów monetą, dokonujemy pewnej idealizacji i rozdzielamy je dokładnie po połowie. Podkreślmy raz jeszcze, że działania te odbywają się w modelu.

W przypadku gdy w danym stanie pozostanie jeden pionek, nie możemy go przesuwać dalej (nie mamy prawa podjąć decyzji, wzdłuż której strzałki miałby on powędrować). Zasilamy stan startowy nowym pionkiem i dokonujemy przesunięć wyłącznie par pionków (tzn. jeden






Rys. 4

TABLICA 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 0 | 0 | 0 | |
| | 0 | 1 | 0 | 0 | |
| | 0 | 2 | 0 | 0 | |
| | 1 | 0 | 1 | 0 | |
| wzrost o 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | wzrost o 1 |
| | 1 | 2 | 1 | 0 | |
| | 2 | 0 | 2 | 0 | |
| | 2 | 1 | 0 | 1 | |
| | 2 | 2 | 0 | 1 | |
| | 3 | 0 | 1 | 1 | |
| wzrost o 2 | 3 | 1 | 1 | 1 | wzrost o 1 |
| | 3 | 2 | 1 | 1 | |
| | 4 | 0 | 2 | 1 | |
| | 4 | 1 | 0 | 2 | |
| | 4 | 2 | 0 | 2 | |
| | 5 | 0 | 1 | 2 | |
| | 5 | 1 | 1 | 2 | |
| | 5 | 2 | 1 | 2 | |
| | 6 | 0 | 2 | 2 | |
| | 6 | 1 | 0 | 3 | |
| | | ... | ... | | |

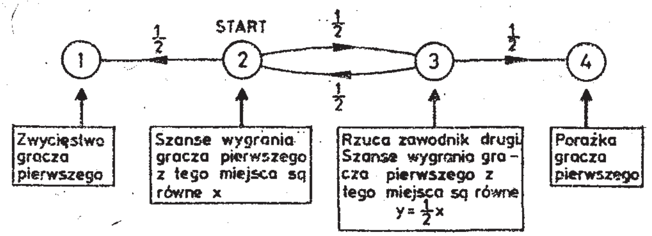
pionek z pary wędruje po jednej strzałce, a drugi — po drugiej). Przeprowadzenie symulacji idealizowanej dla naszego zagadnienia przedstawiają rys. 4 i tablica 2.

Śledząc dokładnie przebieg symulacji idealizowanej łatwo zauważyć, iż wektory stanów wewnętrznych powtarzają się co pewien czas. Pierwszy wektor powtarzającego się cyklu nazywamy *wektorem obciążenia krytycznego*. W tym momencie w każdym stanie wewnętrznym mamy o jeden pionek mniej, niż wynosi najmniejsza liczba pionków, dla których możliwe jest dokonanie przesunięcia (w omawianym przypadku: 2). Dołożenie na starcie jednego pionka powoduje rozpoczęcie przesuwania. W momencie każdorazowego powtórzenia się wektora obciążenia krytycznego następuje zwiększenie liczby pionków w stanach końcowych. Przyrost liczby pionków jest stały, a ich stosunek nie ulega zmianie. Zauważamy więc pewną stacjonarność układu. Wystarczy więc przesuwać pionki tylko do chwili powtórzenia się wektora obciążenia krytycznego. Jest to sygnał do zakończenia symulacji. Przy tym wystarczy rozpocząć symulację od momentu, gdy każdy stan wewnętrzny jest obciążony krytycznie.

Na podstawie symulacji idealizowanej otrzymujemy częstości teoretyczne interesujących nas rezultatów: *częstość teoretyczna zwycięstwa gracza pierwszego równa jest ilorazowi liczby pionków, które dotarły do stanu* 1 *przez liczbę pionków w obu stanach końcowych; częstość teoretyczna zwycięstwa gracza drugiego równa jest ilorazowi liczby pionków, które dotarły do stanu* 4 *przez liczbę pionków w obu stanach końcowych.*

Uzyskaliśmy w ten sposób dokładną ocenę szans obu zawodników na zwycięstwo w rozważanej grze.

Zaprezentowana tu metoda postępowania ma duże znaczenie dydaktyczne. Jest ona dostępna dla uczniów już na poziomie klasy szóstej i jako naturalne przedłużenie — wyidealizowanie — symulacji doświadczalnej może być odkryta przez nich samodzielnie. Zrozumienie tej metody nie wymaga od uczniów żadnych zaawansowanych umiejętności matematycznych, choć wiadomo przecież, że stosuje się ona do nietrywialnych procesów stochastycznych. Jest to poza tym oryginalny przykład modelu teoretycznego utworzonego na drodze naturalnego rozumowania — zamiast wykonywać serie doświadczeń i obserwować ich wyniki, co i tak nie może doprowadzić do precyzyjnych wniosków, poprzez wyidealizowanie sytuacji budujemy model — model dynamiczny — i działamy w tym modelu. Przebieg losowy doświadczenia, które badamy, zastępujemy w modelu prze-




Rys. 5

biegiem zupełnie deterministycznym, „naśladującym" badane doświadczenie. Pozwala to na przewidywanie przebiegu doświadczenia. Otrzymaną teorię i model musimy sprawdzić doświadczalnie.

**Rozwiązanie czwarte — metoda równań.** Kolejną możliwością rozwiązania rozpatrywanego zadania jest metoda, bazująca na znajomości układów równań liniowych (por. [9]). Przebieg rozważanej gry obrazuje graf na rys. 5. Z tego grafu odczytujemy układ równań:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y \\ y = \frac{1}{2}x. \end{cases}$$

Rozwiązujemy go metodą podstawienia i uzyskujemy: $x = \frac{2}{3}$ i $y = \frac{1}{3}$.

Otrzymaliśmy znowu dokładną ocenę szans pierwszego gracza na zwycięstwo.

Metoda ta łączy w sobie zagadnienia z rachunku prawdopodobieństwa z zagadnieniami dotyczącymi układów równań liniowych. Zwłaszcza w szkole średniej może ona dostarczyć motywacji dla rozwiązywania układów równań z więcej niż dwiema niewiadomymi. Przy okazji można tu stosować techniki obliczeniowe skuteczniejsze niż metoda podstawiania, na przykład metodę eliminacji, której zastosowanie dla prostych przypadków przedstawiono już uczniom klasy szóstej (por. [9]).

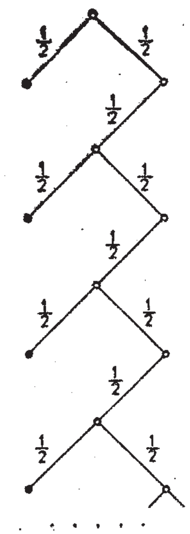
**Rozwiązanie piąte — metoda drzew.** Następny sposób rozwiązania zadania i uzyskania częstości teoretycznych przeznaczony jest dla uczniów szkoły średniej, wykorzystujemy w nim bowiem, tak jak w przypadku rozwiązania pierwszego, pojęcie szeregu geometrycznego. W przypadku przestrzeni probabilistycznej o skończonej liczbie zdarzeń elementarnych rozważane doświadczenie losowe mogliśmy przedstawić za pomocą drzewa (por. [9]). Aby obliczyć interesujące nas częstości teoretyczne dla danego zdarzenia, wystarcza narysować tylko te gałęzie drzewa, które prowadzą do celu i dokonać odpowiednich rachunków. Analogicznie można postąpić w przypadku rozważania przestrzeni probabilistycznej o przeliczalnej liczbie zdarzeń elementarnych, a więc również w przypadku naszego zadania.

Ustalając, że interesują nas szanse zwycięstwa zawodnika pierwszego, rysujemy tylko te gałęzie drzewa, które prowadzą do celu (rys. 6). Korzystając z reguł mnożenia i sumowania częstości teoretycznych (por. [9]) otrzymujemy, że częstość teoretyczna zwycięstwa zawodnika pierwszego wynosi: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+$

$$+\ldots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Zwróćmy również uwagę na to, że






Rys. 6

tych samych obliczeń możemy dokonać, analizując graf (rys. 4) i sumując poszczególne szanse dotarcia ze stanu (2) do stanu (1).

Ze stanu (2) do stanu (1) można dotrzeć w jednym kroku z częstością teoretyczną $\frac{1}{2}$, w trzech krokach — z częstością $\frac{1}{8}$, w pięciu krokach częstością $\frac{1}{32}$ itd... .

Częstość teoretyczna dotarcia do stanu (1) ze stanu (2) w parzystej liczbie kroków wynosi 0. Zatem częstość teoretyczna dotarcia ze stanu (2) do stanu (1) wynosi:

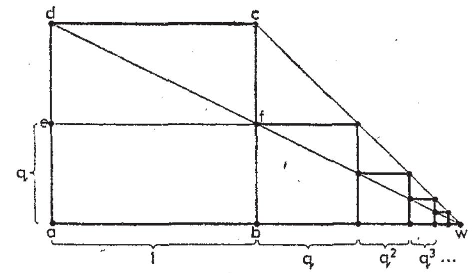
$$\frac{1}{2}+0+\frac{1}{8}+0+\frac{1}{32}+\ldots = \frac{2}{3}.$$

Tego rodzaju rozumowania nie wymagają komentarzy. Zauważmy tylko, że przedstawione tu obliczenia, mimo że są analogiczne do rozszerzonej o dokładnie rachunki metody użytej w rozwiązaniu pierwszym, to jednak są od niej znacznie mniej czytelne. Na wczesnym etapie nauczania diagram kwadratowy pozwala uczniom od razu wzrokowo ocenić szanse, gdy tymczasem nieskończone drzewo czy też zliczanie szans z grafu tej zalety nie posiadają.

Przy metodzie drzew, podobnie jak przy dodawaniu pól prostokątów w rozwiązaniu pierwszym, w pewnym momencie musimy zsumować wyrazy szeregu geometrycznego: $s = 1+q+q^2+q^3+\ldots$ $(0 < q < 1)$.

W przypadku, gdy nie mamy jeszcze do dyspozycji wzoru na sumę tego szeregu, można tę trudność w pewien sposób pokonać.

Jedną z ładniejszych metod jest odwołanie się do tego, co uczniowie wiedzą o podobieństwie trójkątów lub prostokątów i o jednokładności. Bierzemy pod uwagę kwadraty o długości boków odpowiednio: $1$, $q$, $q^2$, $q^3$, ... . (rys. 7). Kwadrat




Rys. 7

o boku długości 1 przekształcamy przez jednokładność tak, aby przeszedł na narysowany obok kwadrat o boku długości $q$, a ten z kolei na kwadrat o boku długości $q^2$ itd., tak, jak na rys. 7. Możemy wówczas napisać równość:

$\frac{aw}{ab}=\frac{ef}{ed}$ czyli $\frac{s}{1}=\frac{1}{1-q}$; zatem $s=$ $=\frac{1}{1-q}(0<q<1)$.

**Rozwiązanie szóste — metoda zero-jedynkowa.** W rozwiązaniu piątym, rozpatrując graf naszego zadania (rys. 4) i możliwości dotarcia ze stanu startowego do stanu (1) w zależności od liczby kroków, utworzyliśmy szereg geometryczny: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots$ . Zapisując poszczególne ułamki w systemie dwójkowym, a następnie sumując je, uzyskamy częstość teoretyczną zwycięstwa dla gracza pierwszego, wyrażoną w postaci okresowego ułamka dwójkowego:

$$\begin{array}{r} 0,1\phantom{0000} \\ 0,001\phantom{00} \\ +0,00001 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \hline 0,101010\ldots \end{array}$$

Przechodząc z systemu dwójkowego na dziesiątkowy (por. [9]), otrzymujemy:

$$\begin{array}{r} x=(0{,}101010\ldots)_2, \\ \underline{100_2 x=(10{,}10{,}010\ldots)_2,} \\ 3x=2, \\ x=\frac{2}{3}. \end{array}$$

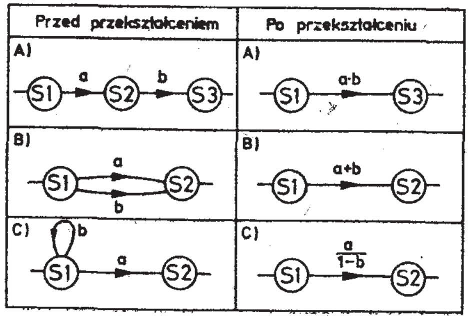
Zwróćmy uwagę, że częstość teoretyczną $x$ możemy również odczytać bezpośrednio z grafu (rys. 4), zapisując w systemie dwójkowym ułamek zgodnie z regułą: *jeśli ze stanu startowego do stanu (1) można dotrzeć w i-krokach, to na i-tym miejscu po przecinku stawiamy jedynkę, w przeciwnym przypadku stawiamy zero.*

Ta metoda odnosi się oczywiście do takich grafów, gdzie szanse przejścia z jednego stanu do drugiego w jednym kroku są równe $\frac{1}{2}$. Sądzimy, że jest to nie tylko ciekawy sposób rozwiązania zadania probabilistycznego, ale jednocześnie doskonała okazja do przypomnienia i utrwalenia podstawowych rachunków w systemie dwójkowym oraz motywacja do jego stosowania.

**Rozwiązanie siódme — przekształcanie grafu.** Przebieg gry, będącej przedmiotem naszych zainteresowań, przedstawiliśmy w postaci grafu na rys. 4. Obliczanie szans na zwycięstwo zawodnika pierwszego sprowadza się, jak wiemy, do wyznaczenia szansy przejścia ze stanu (2) do stanu (1).

Obecnie wyznaczymy te szanse metodą przekształcania grafów (por. [8]), która polega na kolejnym eliminowaniu z grafu jego stanów wewnętrznych aż do momentu, w którym graf będzie się składał tylko ze stanu startowego i stanów końcowych. Eliminacja poszczególnych stanów wewnętrznych pociąga za sobą oczywiście zmianę szans przejścia z jednych stanów do drugich, zgodnie z regułami wynikającymi z własności zagadnień opisywanych przez te grafy.

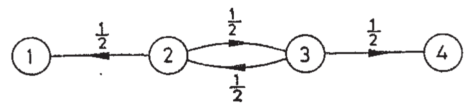
Każdy z grafów może składać się z „elementów" trojakiego rodzaju, które można przekształcać tak jak na rys. 8



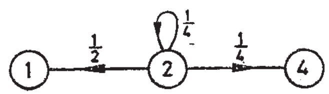

Rys. 8



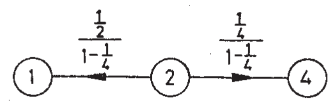
i obliczać odpowiednie częstości teoretyczne zgodnie z regułami dodawania i mnożenia stosowanymi dla drzew (por. [8]). W przypadku C) częstość teoretyczna przejścia z jednego stanu (z pętlą) do drugiego jest równa sumie częstości teoretycznych wszystkich możliwych dróg prowadzących ze stanu **S1** do stanu **S2**. Kolejne drogi różnią się między sobą krotnością pętli. Szukana częstość jest więc sumą nieskończonego szeregu geometrycznego: $a+ab+ab^2+ab^3+\ldots=$ $=a\cdot\frac{1}{1-b}$. Zgodnie z podanymi regułami przekształcamy nasz graf w sposób następujący. Po zredukowaniu stanu (3), a następnie pętli w stanie (2) (rys.: 9a, 9b, 9c) odczytujemy, że szansa przejścia ze stanu (2) do stanu (1) wynosi $\frac{2}{3}$.




Rys. 9a




Rys. 9b




Rys. 9c

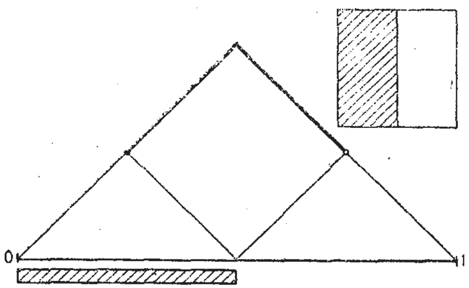
Metoda przekształcania grafów jest bardzo skuteczna w przypadku, gdy mamy do czynienia z grafami o większej liczbie stanów. Jest ona wówczas bardziej efektywna niż metoda układów równań liniowych, czy też symulacji idealizowanej.

**Rozwiązanie ósme — „zanurzanie" drzewa.** Wszystkie przedstawione do tej pory rozwiązania rozważanego problemu bazują na pojęciach częstości doświadczalnej i częstości teoretycznej. Na tym etapie nauczania rachunku prawdopodobieństwa nie określamy pojęcia prawdopodobieństwa, ani też nie dowodzimy, że częstości teoretyczne powinny być miarą. Takie podejście jest korzystne, ponieważ w początkowym etapie nauczania główny nacisk kładziemy na poszukiwanie dostępnych dla uczniów dróg rozwiązania danego problemu, natomiast rozważania natury teoretycznej zostawiamy na dalszy etap nauczania. Pojęcie prawdopodobieństwa w omawianej koncepcji pojawi się dopiero wówczas, gdy zajdzie taka potrzeba i gdy będzie można wprowadzić je jako miarę unormowaną, dowodząc jednocześnie, że rozważane częstości teoretyczne są takimi miarami.

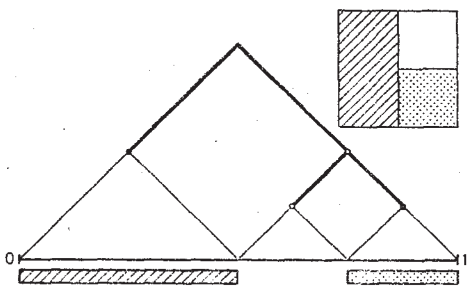
Jako wprowadzenie do tego etapu nauczania rachunku prawdopodobieństwa może posłużyć następująca metoda rozwiązania naszego zadania, która polega na „zanurzeniu" nieskończonego drzewa w odcinek $<0,1>$.

Oto przebieg rozumowania. W rozwiązaniu pierwszym rozpatrywaliśmy poszczególne etapy gry i zaznaczaliśmy na kwadracie szanse każdego z graczy na trafienie do kosza. Teraz będziemy robić to samo, z tym że poszczególne etapy gry zaznaczymy na drzewie, a odpowiednie szanse na odcinku $<0,1>$. Grę rozpoczyna Jacek. Jego szansa na trafienie do kosza wynosi $\frac{1}{2}$. Gdy Jacek trafi, gra się skończy, w przypadku przeciwnym będzie rzucać Marek. Rysujemy zatem dwie gałęzie drzewa obrazujące pierwszy rzut do kosza. Gałęzie te „dzielą" jednocześnie odcinek $< 0, 1 >$ na połowy, z których jedna przedstawia szanse Jacka (rys. 10). W przypadku gdy Jacek nie trafił, do kosza rzuca Marek. Zaznaczamy tę sytuację, rysując kolejne dwie gałęzie drzewa. Jego szansa na celny rzut wynosi $\frac{1}{2}$, zatem na odcinku $< 0, 1 >$ zaznaczamy kolorem Marka tę część, która wyznaczona została przez gałąź prowadzącą do jego sukcesu (rys. 11). Dalsze postępowanie przedstawiają następne rysunki (rys.: 12, 13, 14, 15).

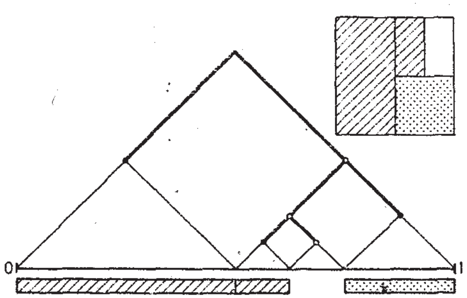
Uwzględniając każdy kolejny etap gry, otrzymujemy coraz dokładniejsze przybliżenia częstości teoretycznych każdego z graczy. Stąd już tylko krok do wykazania, że tak przedstawione częstości teoretyczne są wartościami pewnej przeliczalnie addytywnej miary unormowanej.



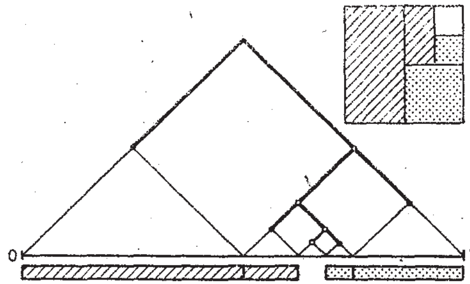
Rys. 10



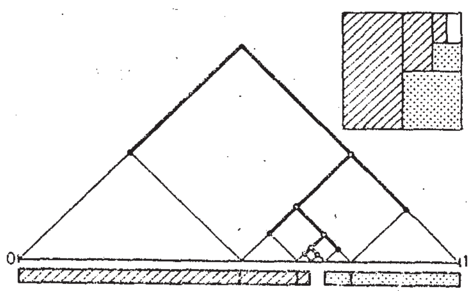
Rys. 11



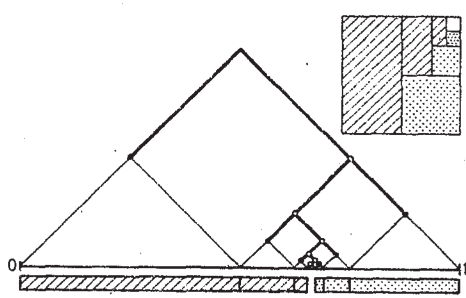
Rys. 12



Rys. 13



Rys. 14



Rys. 15



**Rozwiązanie dziewiąte — metoda macierzy.** Graf obrazujący przebieg rozpatrywanego przez nas doświadczenia losowego (rys. 4) można przedstawić, zapisując szanse przejścia z jednego stanu do drugiego w postaci macierzy

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & & & & \\ 2 & & & & \\ 3 & & & & \\ 4 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} (1) & (2) & (3) & (4) \end{array} \\ \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Na przecięciu $i$-tego wiersza i $j$-tej kolumny zapisujemy szanse przejścia ze stanu (i) do stanu (j) w jednym kroku.

Obliczając kolejne potęgi tej macierzy uzyskujemy coraz lepsze przybliżenia interesującej nas częstości teoretycznej przejścia ze stanu (2) do stanu (1) (tablica 3).

Porównując poszczególne wyniki zauważamy, że odpowiadają one sumom kolejnych wyrazów szeregu geometrycznego.

Jest to dobrze znana wszystkim, którzy interesują się rachunkiem prawdopodobieństwa na poziomie akademickim, metoda rozwiązywania skończonych łańcuchów Markowa, do których rozważane przez nas zagadnienie również się zalicza. Aczkolwiek rozwiązanie to sprowadza się do prostych rachunków, to jednak uzasadnienie takiego właśnie postępowania wymaga bardziej zaawansowanego poziomu, niż w przypadku poprzednich rozwiązań, dlatego też proponujemy je raczej dla uczniów szkół średnich, już lepiej orientujących się w naturze i specyfice rachunku prawdopodobieństwa. Jednak metoda ta ma swoją zaletę dydaktyczną, bowiem w przystępny sposób wprowadza i oswaja ucznia z pojęciem macierzy.

Na zakończenie tego przeglądu rozwiązań dodajmy, że można otrzymać interesujący wariant zadania, dokonując zmiany szans zawodników na trafienie do kosza. Załóżmy, że jeden trafia z częstością $\frac{1}{3}$, a drugi z — częstością $\frac{2}{5}$. Zawody rozpoczyna ten, kto gorzej rzuca do kosza. Co dzieje się w takiej sytuacji (por. [9]).?

Rozwiązanie tego zagadnienia bezpośrednio po tym, które dokładnie omówiliśmy, może stanowić ciekawy dla uczniów zestaw problemowy. W tym przypadku okazuje się bowiem, że gdy grę rozpoczyna słabszy, pierwszeństwo zmienia jego szanse o tyle, że lepszy zawod-

TABLICA 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & \frac{1}{16} & 0 & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & 0 & \frac{1}{16} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{21}{32} & 0 & \frac{1}{32} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{32} & 0 & \frac{21}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{21}{32} & 0 & \frac{1}{32} & \frac{5}{16} \\ \frac{5}{16} & \frac{1}{32} & 0 & \frac{21}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{21}{32} & \frac{1}{64} & 0 & \frac{21}{64} \\ \frac{21}{64} & 0 & \frac{1}{64} & \frac{21}{32} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nik w takim pojedynku na ogół przegrywa.

Przedstawione w niniejszym artykule metody rozwiązania, aczkolwiek dotyczą jednego konkretnego zadania, są metodami ogólnymi, dobrze stosującymi się do szerokiej klasy zagadnień o przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych, a także w uproszczonej formie — do problemów o skończonej liczbie zdarzeń elementarnych. Wskazują one, że rozwiązanie postawionego problemu może odbywać się na trzech poziomach: począwszy od najbardziej elementarnego polegającego na zapoznaniu się z istotą zjawiska losowego na drodze jego obserwacji, przeprowadzenia symulacji itp., poprzez poziom bardziej zaawansowany, polegający na kształtowaniu umiejętności budowania teoretycznego modelu doświadczenia losowego i dokonywania prostych rozumowań prowadzących do teoretycznej oceny szans, aż po poziom najbardziej zaawansowany związany z poznaniem i zrozumieniem pojęcia prawdopodobieństwa jako miary.

Dzięki takim właśnie metodom za pomocą prostego, wzbogacanego stopniowo aparatu matematycznego oraz naturalnych rozumowań jesteśmy w stanie wprowadzić uczniów w świat całkiem nietrywialnych problemów probabilistycznych, które do tej pory nie były dostępne dla nauczania szkolnego, a ich brak uniemożliwiał uczniom uzyskanie właściwego obrazu rachunku prawdopodobieństwa, czym on jest i czym się zajmuje. A jest to przecież obok statystyki ,,(...) jedna z najpoważniejszych, ze względu na jej wszechobecność, dziedzin matematyki stosowanej. Poprzez te właśnie dwie dyscypliny matematyczne potrafimy bowiem inteligentnie patrzeć na to, co nas otacza, i podejmować racjonalne decyzje. (...)'' (por. [6]).

**Literatura**


[1] B. Chrzan-Feluch, W. Zawadowski, *Matematyka 4*, WSiP, Warszawa 1980.

[2] K. Dałek, W. Zawadowski, *Matematyka 5. Wydanie dla nauczyciela*, WSiP, Warszawa 1982.

[3] T. Dąbrowska, J. Przyjemski, *Matematyka 6*, WSiP, Warszawa 1980.

[4] A. Engel, *The Probabilistic Abacus*, ,,Educational Studies in Mathematics'', t. 6, 1975, s. 1—32.

[5] H. Freudenthal, *The Crux of Course Design in Probability*, ,,Educational Studies in Mathematics'', t. 5, 1974, s. 261—277.

[6] P. Hilton, *Fałszywe dychotomie w aktualnych poglądach na nauczanie matematyki i nauk przyrodniczych*, ,,Dydaktyka Matematyki'', t. 1, PWN, Warszawa 1982, s. 139—162.

[7] H. Łabanowska, *Matematyka 4*, WSiP, Warszawa 1977.

[8] E. Łakoma, *Informatyczne podejście do nauczania rachunku prawdopodobieństwa*, ,,Sprawozdania Instytutu Informatyki Uniwersytetu Warszawskiego'', 78/1979.

[9] P. Nowicki, W. Zawadowski, *Matematyka 6*, WSiP, Warszawa 1983.

[10] W. Szlenk, *Rachunek prawdopodobieństwa dla IV klasy liceum ogólnokształcącego i technikum*, PZWS, Warszawa 1971.

[11] K. Szymański, E. Zegadło, *Matematyka 5*, WSiP, Warszawa 1980.

[12] W. Zawadowski, *Podręcznik ,,Matematyka 5''*. ,,Matematyka'' 1/1983, s. 3—10.

[13] *Teaching Statistics and Probability*, ,,The National Council of Teachers of Mathematics'', 1981 Yearbook, s. 141—142.